Κόμβοι, Κοτσίδες και Στατιστική Μηχανική

Διπλωματική εργασία

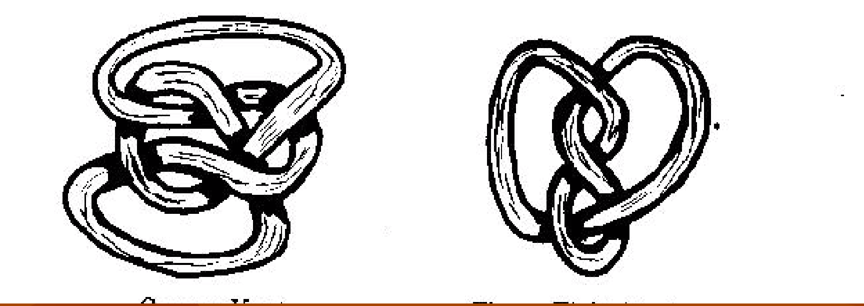
Μπαρμπαγιαννέρης Κωστής

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια : Σοφία Λαμπροπούλου

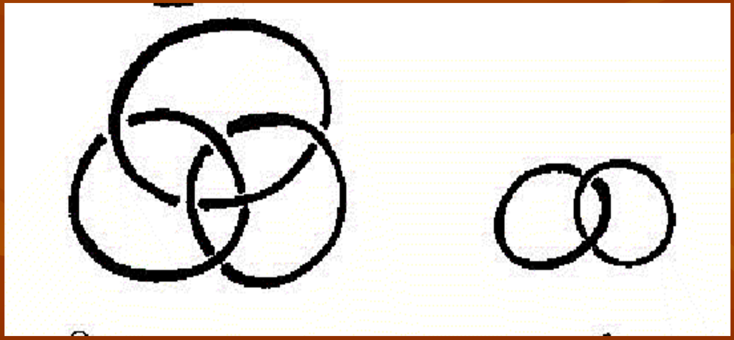
- Οι κόμβοι ως μαθηματικά αντικείμενα.
- Συναρτήσεις που τους περιγράφουν και τους ταξινομούν (αναλλοίωτες).
- Σύνδεση των αναλλοίωτων με συναρτήσεις που περιγράφουν μοντέλα Στατιστικής Μηχανικής.
- Σχέση κόμβων-κοτσίδων

Ένας **κόμβος** είναι η εικόνα μιας εμφύτευσης του κύκλου S^1 στον R^3.

Εμφύτευση είναι μία 1-1 συνάρτηση f που είναι συνεχής αυτή και η αντίστροφή της .



Ένας κρίκος με ν συνιστώσες είναι η εικόνα μιας εμφύτευσης ν αντιγράφων του S^1 στον R^3.

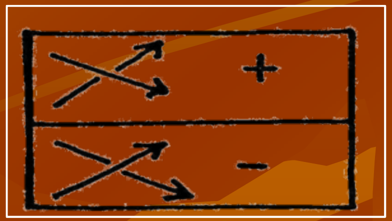


Διάγραμμα είναι μία προβολή του κόμβου στο επίπεδο,ώστε να τα σημεία τομής να είναι μόνο διπλά και πεπερασμένα και να δίνουν την πληροφορία άνω/κάτω.

- **Σε ένα διάγραμμα κόμβου δεν επιτρέπονται οι καταστάσεις**

Ένας κόμβος θα λέγεται **προσανατολισμένος** αν σε κάθε συνιστώσα του δοθεί μια κατεύθυνση.

Τότε σε κάθε διασταύρωση αντιστοιχεί ένας προσανατολισμός.



Η ιστορία της Θεωρίας Κόμβων

- Carl Frederic Gauss (Analysi Situs) 19ος αιώνας

- Lord Kelvin

  Το σύμπαν περιέχει ένα αόρατο υγρό, τον αιθέρα.

  Τα άτομα είναι στροβιλισμοί του υγρού σε σχήμα κόμβων.

- Peter Tait

  Μελέτη και ταξινόμιση κόμβων, εμπνευσμένη από την θεωρία του Kelvin.

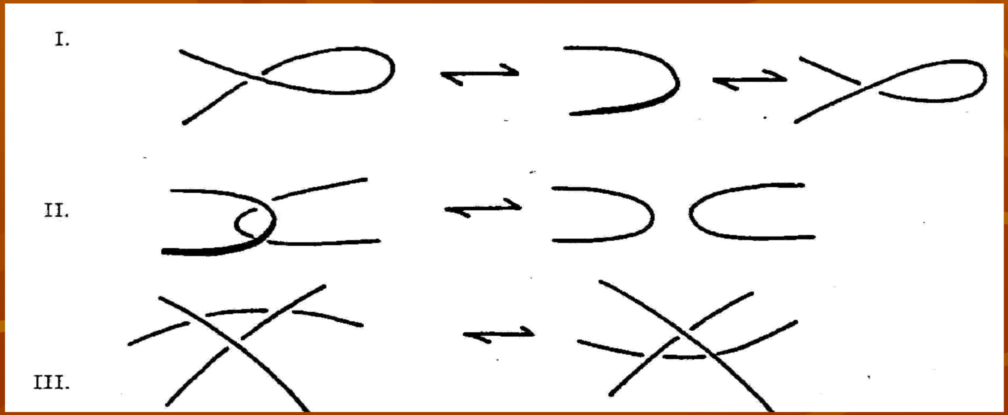
- James Watson, Francis Crick

  Το DNA έχει σχήμα διπλής έλικας και μάλιστα σε πολλά σημεία του δημιουργούνται κόμβοι.

Ισοτοπία κόμβων

- Δύο κόμβοι K_1, K_2 είναι ισοτοπικοί αν υπάρχει ένας ομοιομορφισμός f του R^3 στον εαυτό του, δηλαδή μία απεικόνιση 1-1, επί και αμφισυνεχής ώστε f (K_1) = K_2.
- Reidemeister

Οποιαδήποτε διαγράμματα ισοτοπικών κόμβων σχετίζονται μέσω μίας ακολουθίας τριών κινήσεων, των κινήσεων **Reidemeister.**



Αν ικανοποιούνται οι I, II, III $\longrightarrow$ πλήρης ισοτοπία.

Αν ικανοποιούνται μόνο οι II, III $\longrightarrow$ κανονική ισοτοπία

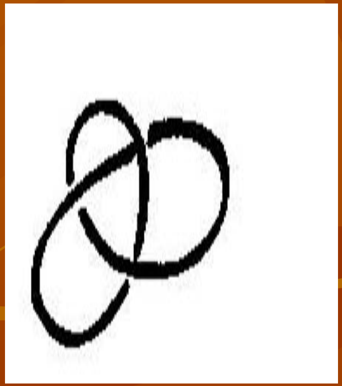
Αναλλοίωτες

Μία απεικόνιση από το σύνολο των κόμβων σε κάποιο άλλο (π.χ. πολυωνύμων) λέγεται αναλλοίωτη αν :

για K ισοτοπικό του K΄ $\longrightarrow$ I (K) = I (K΄).

Π.χ.

- Το πολυώνυμο Alexander



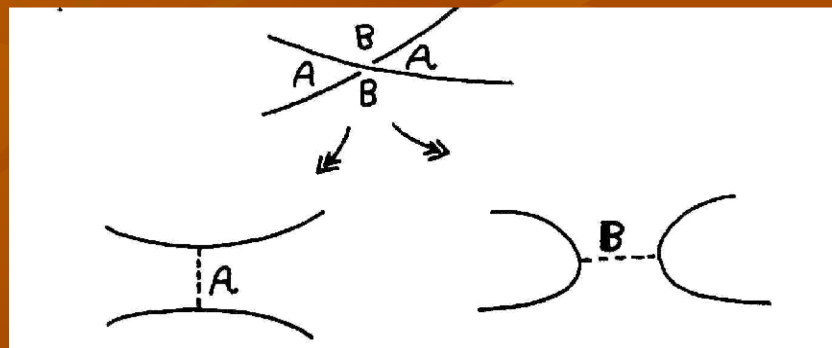
t-1-1/t

3t-1-1/t

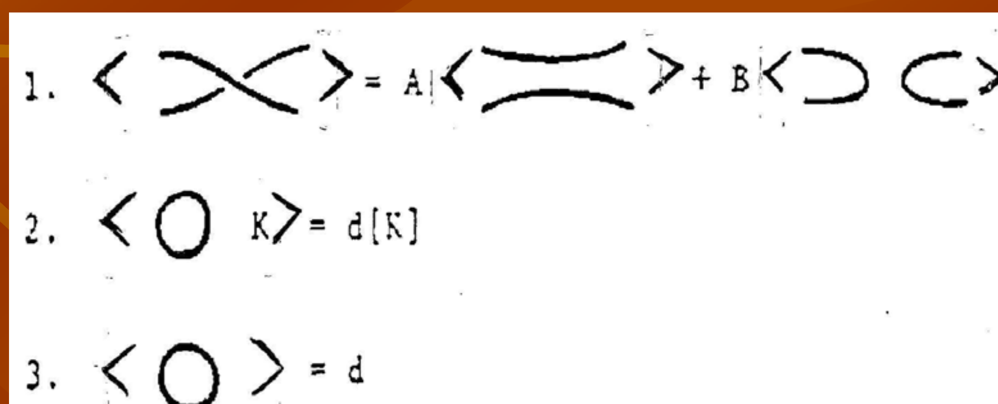
- Το πολυώνυμο Jones
- Το πολυώνυμο HOMFLYPT
- Το πολυώνυμο Kauffman bracket

Το πολυώνυμο bracket

- Μία διασταύρωση του διαγράμματος K μπορεί να διασπαστεί ως εξής :



- Το πολυώνυμο bracket θα πρέπει να ικανοποιεί τα παρακάτω :



Μία **κατάσταση** σ είναι μία επιλογή τρόπου διάσπασης για κάθε διασταύρωση του διαγράμματος.

Το bracket για μία κατάσταση σ θα είναι :

$< K \mid \sigma > = A^i B^j$

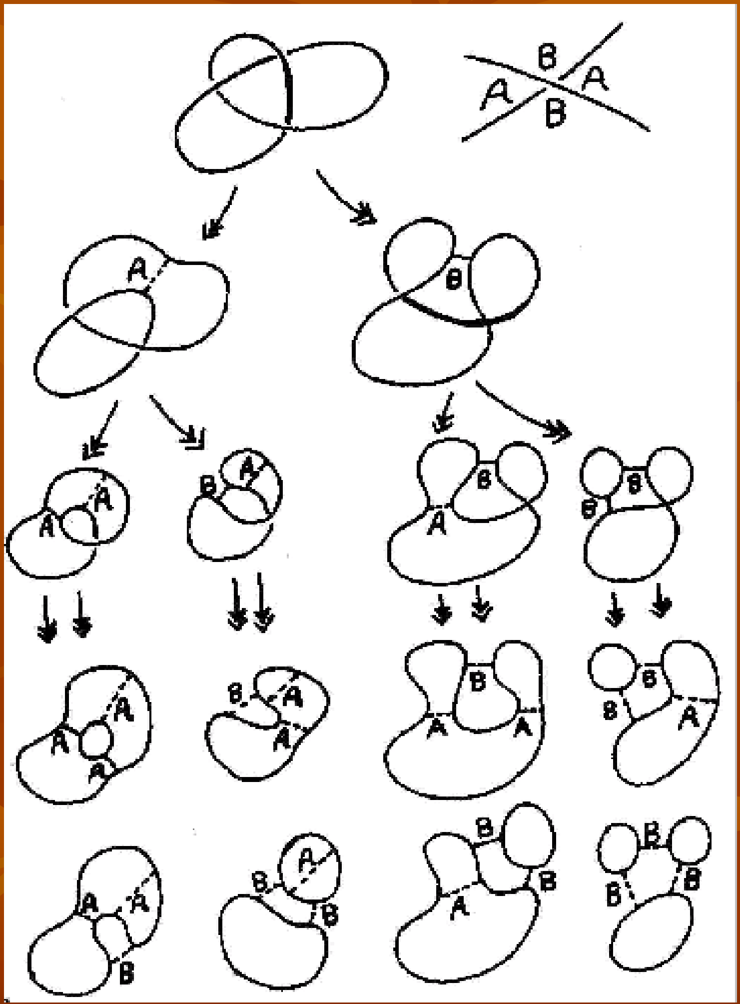
Η ολική συνεισφορά μιας κατάστασης σ στο bracket είναι : $< K \mid \sigma > d^{|\sigma|}$

Το πολυώνυμο bracket :

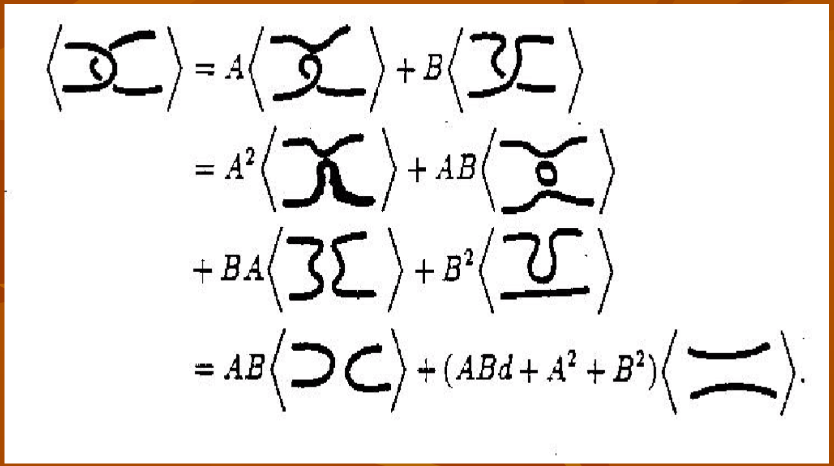
$$< K > = \sum_\sigma < K \mid \sigma > d^{|\sigma|}$$

π.χ.

$$< K > = A^3 d^2 + A^2 Bd + A^2 Bd + AB^2 d +$$
$$+ A^2 Bd + AB^2 d^2 + AB^2 d^2 + B^3 d^3 =$$
$$= A^3 d^2 + 3A^2 Bd + 3AB^2 d^2 + B^3 d^3$$

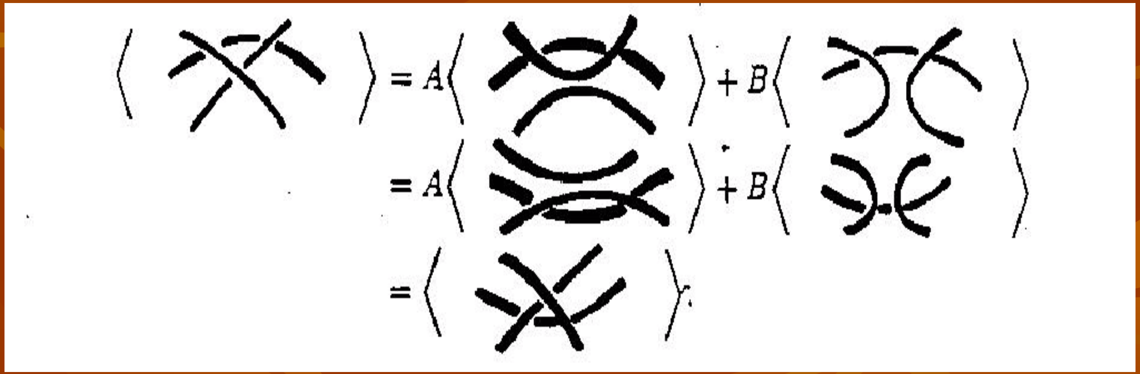


Για κατάλληλη επιλογή παραμέτρων το bracket είναι αναλλοίωτη κανονικής ισοτοπίας

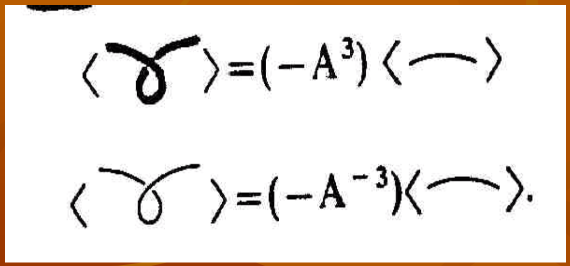


A B =1

d = $-A^{-2} - A^{2}$



Μετατροπή της αναλλοίωτης σε αναλλοίωτη πλήρους ισοτοπίας



- Ορίζουμε :

$$f_K(A) = (-A)^{-3\omega(K)} \langle K \rangle$$

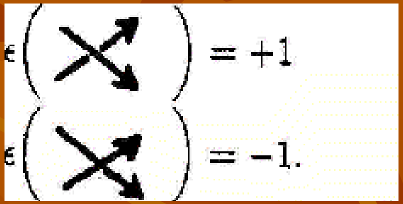
- Θέτοντας :

$$V_K(t) = f_K(t^{-1/4})$$

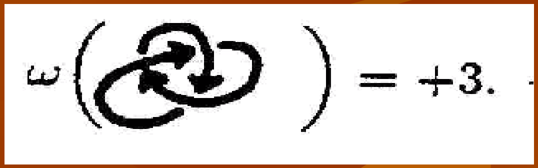
Η μετατροπή του bracket σε αναλλοίωτη πλήρους ισοτοπίας ταυτίζεται με το **πολυώνυμο Jones**.

Ορίζουμε τον αριθμό writhe:

w(K) = Σ ε (ρ) , όπου :



Για παράδειγμα :



Το w(K) είναι η πιο απλή αναλλοίωτη κανονικής ισοτοπίας.

Στατιστική Μηχανική

- Μελετά μεγάλα συστήματα από μόρια.
- Εξετάζει τη συνολική συμπεριφορά του συστήματος.

Ιδιάζουσες καταστάσεις

1. Αλλαγή φάσεως
2. Μαγνητισμός
3. Μη αντιστρεψιμότητα

Πρόσφατη συσχέτιση Στατιστικής Μηχανικής και Θεωρίας Κόμβων, λόγω της ανακάλυψης του πολυωνύμου Jones.

Πολυώνυμο Jones και Στατιστική Μηχανική

μοντέλο → Συνάρτηση διαμέρισης ← πολυώνυμο τριών μεταβλητών

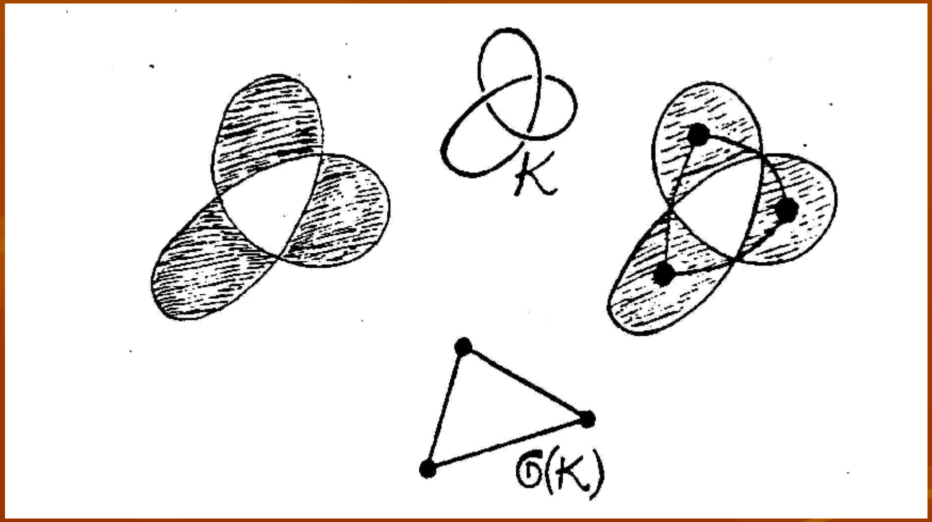
Πολυώνυμο Jones : προκύπτει από το ίδιο πολυώνυμο

Συνάρτηση διαμέρισης και πολυώνυμο Jones είναι και τα δύο εκφράσεις του ίδιου αλγορίθμου που ορίζεται πάνω σε διαγράμματα κόμβων.

Γραφήματα

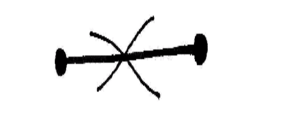
Διάγραμμα → Γράφημα

1. Σκιαγραφούμε κατά το σχήμα της σκακιέρας
2. Τοποθετούμε σε κάθε περιοχή μαύρου χρώματος μία κορυφή.
3. Συνδέουμε τις κορυφές με μια πλευρά,όταν μεταξύ τους υπάρχει διασταύρωση.



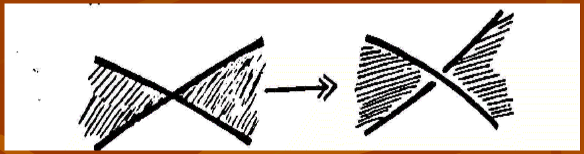
Γράφημα → Διάγραμμα

1. Τοποθετούμε μια διαστάυρωση σε κάθε πλευρά



2. Συνδέουμε με απλά τόξα

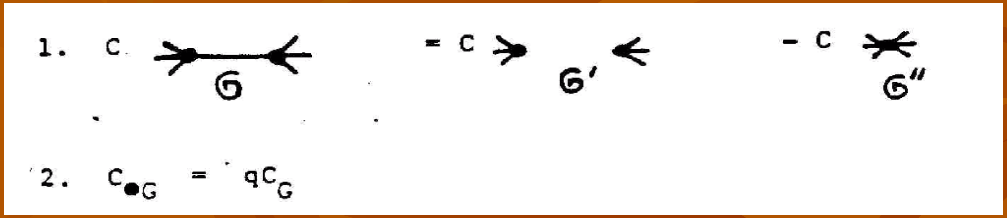
3. Θεωρούμε τη σύμβαση



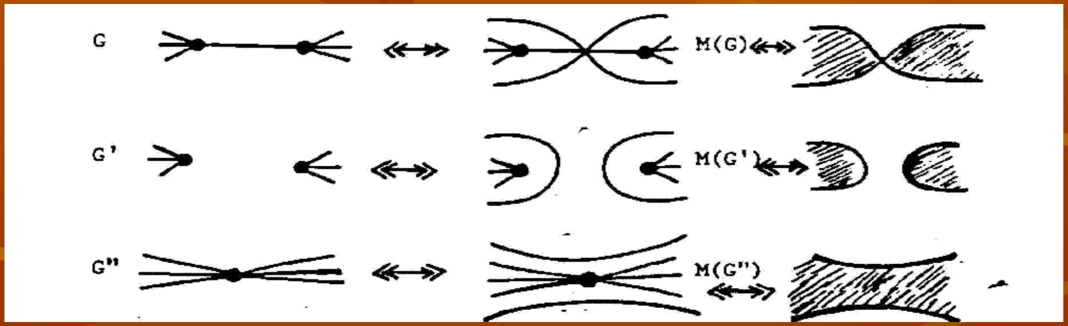
Για να πάρουμε τον αρχικό κόμβο γράφουμε + ή – πάνω σε κάθε πλευρά.

Το χρωματικό και το διχρωματικό πολυώνυμο

Χρωματικό πολυώνυμο για ένα επίπεδο γράφημα G είναι το πλήθος των κατάλληλων χρωματισμών των κορυφών του G με q χρώματα.



Σύνδεση χρωματικού πολυωνύμου και πολυωνύμου bracket



Το **διχρωματικό πολυώνυμο Z** είναι γενίκευση του χρωματικού

Ορίζω το ειδικό πολυώνυμο {K(G)} από τη σχέση :

$$\{K(G)\} = \langle K \rangle (q^{-1/2}v, 1, q^{1/2})$$

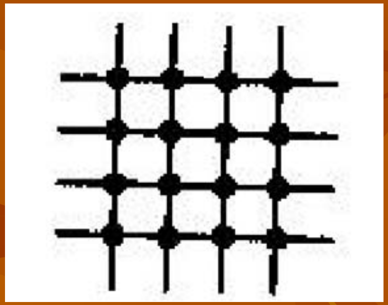
Τότε $Z = q^{N/2}\{K\,(G)\}$ όπου N ο αριθμός των κορυφών του γραφήματος.

Το μοντέλο Potts

- Επίπεδο πλέγμα μορίων.
- Κάθε μόριο φέρει κάποιο spin.

Παραδοχές :

1. Το πλέγμα είναι απείρων διαστάσεων.
2. Δύο μόρια αλληλεπιδρούν μόνο αν είναι ενωμένα με μια πλευρά.
3. Αν τα αλληλεπιδρώντα μόρια έχουν διαφορετικό spin, η αλληλεπίδραση μεταξύ τους είναι μηδενική.



Κατάσταση σ είναι μία επιλογή spin για κάθε κορυφή του γραφήματος.

Συνάρτηση διαμέρισης

- $E(\sigma) = \Sigma\, \delta(\sigma_i,\sigma_j)$: η ενέργεια αλληλεπίδρασης μιας κατάστασης σ.
- $Z = \Sigma \exp(-E(\sigma) / KT)$: συνάρτηση διαμέρισης

Συνδυάζοντας τα παραπάνω :

$$Z = \Sigma \exp[(-1 / KT)\, \Sigma\, \delta(\sigma_i,\sigma_j)] = \Sigma\, \Pi \exp[(-1 / KT)\, \delta(\sigma_i,\sigma_j)]$$

Θέτοντας :

$\nu = \exp(-1/KT) - 1$, $\exp[(-1 / KT)\, \delta(\sigma_i,\sigma_j)] = 1 + \delta(\sigma_i,\sigma_j)$

προκύπτει : $Z = \Sigma\, \Pi\, [1 + \nu\, \delta(\sigma_i,\sigma_j)]$

Η συνάρτηση Z ικανοποιεί τους κανόνες του διχρωματικού πολυωνύμου.

Η πορεία που έχουμε ακολουθήσει μπορεί να δοθεί διαγραμματικά ως εξής :

Αρχικό μοντέλο

συνάρτηση διαμέρισης

Διχρωματικό πολυώνυμο

ειδικό πολυώνυμο

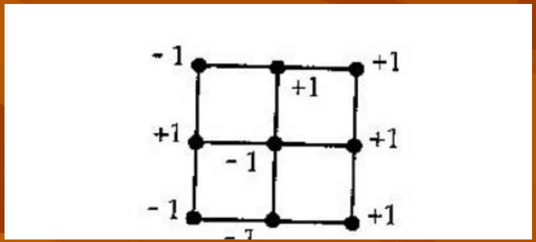
Πολυώνυμο bracket

αρχικός κόμβος

Μοντέλο Ising

2 δυνατά spin για κάθε μόριο

Μία πιθανή κατάσταση



$E(\sigma_i,\sigma_j)$: ενέργεια αλληλεπίδρασης
μεταξύ 2 μορίων.

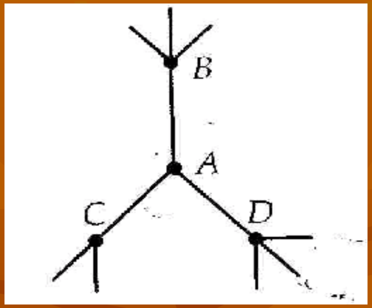
$E(\sigma) = \Sigma\ E(\sigma_i,\sigma_j)$: ενέργεια μιας κατάστασης σ.

Συνάρτηση βάρους : $w(\sigma_i,\sigma_j) = \exp\ (- E(\sigma_i,\sigma_j) / KT)$

Αναζητώ συνάρτητηση Q(σ) η οποία να εξαρτάται από την ενέργεια του συστήματος : $Q(\sigma) = \exp\ (-E(\sigma)/KT)$

Συνάρτηση διαμέρισης : $Z = \Sigma\ \exp\ (-E(\sigma,)/KT)= \Sigma\ \Pi\ w(\sigma_i,\sigma_j)$

Εξίσωση Yang-Baxter



- *Άστρο* είναι μία κορυφή με 3 πλευρές που εξέρχονται από αυτήν :

$Q(\sigma) = \Pi\, w(\sigma_i,\sigma_j) = w(\sigma_A,\sigma_B)\, w(\sigma_A,\sigma_C)\, w(\sigma_A,\sigma_D)\, \Pi\, w(\sigma_i,\sigma_j)$

σ΄ : η κατάσταση που έχει τα spin σε όλες τις κορυφές ίδια με την σ, εκτός αυτό της κορυφής Α.

$Q(\sigma) + Q(\sigma') = w(1,\sigma_B)\, w(1,\sigma_C)\, w(1,\sigma_D)\, \Pi w(\sigma_i,\sigma_j) + w(-1, \sigma_B)\, w(-1,\sigma_C)\, w(-1,\sigma_D)\ \ \Pi\, w(\sigma_i,\sigma_j)$.

Όλο το σύνολο δυνατών καταστάσεων μπορεί να διαμεριστεί σε τέτοια ζεύγη καταστάσεων, άρα :

$Z = \Sigma\, [w(1,\sigma_B)\, w(1,\sigma_C)\, w(1,\sigma_D) + w(-1, \sigma_B)\, w(-1,\sigma_C)\, w(-1,\sigma_D)]\, \Pi\, w(\sigma_i,\sigma_j)$.

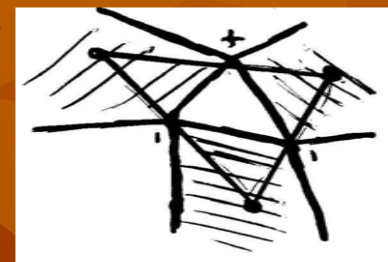
$w(1,\sigma_B)\, w(1,\sigma_C)\, w(1,\sigma_D) + w(-1, \sigma_B)\, w(-1,\sigma_C)\, w(-1,\sigma_D) =$

$= \ w'(\sigma_B,\sigma_C)\, w'(\sigma_C,\sigma_D)\, w'(\sigma_D,\sigma_B)$

Συνάρτηση διαμέρισης όπου το άστρο αντικαταστάθηκε από τρίγωνο (μία κορυφή λιγότερη) :

$Z = \Sigma\, w'(\sigma_B,\sigma_C)\, w'(\sigma_C,\sigma_D)\, w'(\sigma_D,\sigma_B)\, \Pi\, w(\sigma_i,\sigma_j)$.

Έστω 2 προσημασμένα γραφήματα που διαφέρουν μόνο κατά τη σχέση άστρου-τριγώνου.



Για εκείνες τις επιλογές προσημασμένων γραφημάτων που ικανοποιούν τη Yang-Baxter, τα αντίστοιχα διαγράμματα θα διαφέρουν κατά την τρίτη κίνηση Reidemeister.

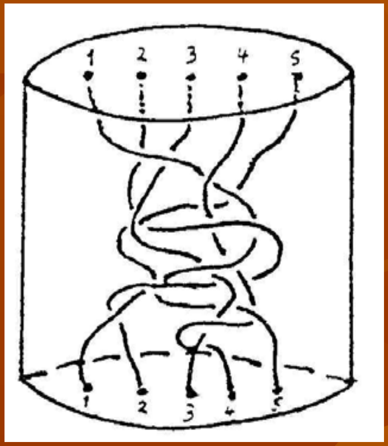
Με επιβολή συνθηκών για τις κινήσεις I,II η συνάρτηση διαμέρισης γίνεται αναλλοίωτη κόμβων.

Από το μοντέλο Ising προκύπτει η αναλλοίωτη Arf.

Κοτσίδες

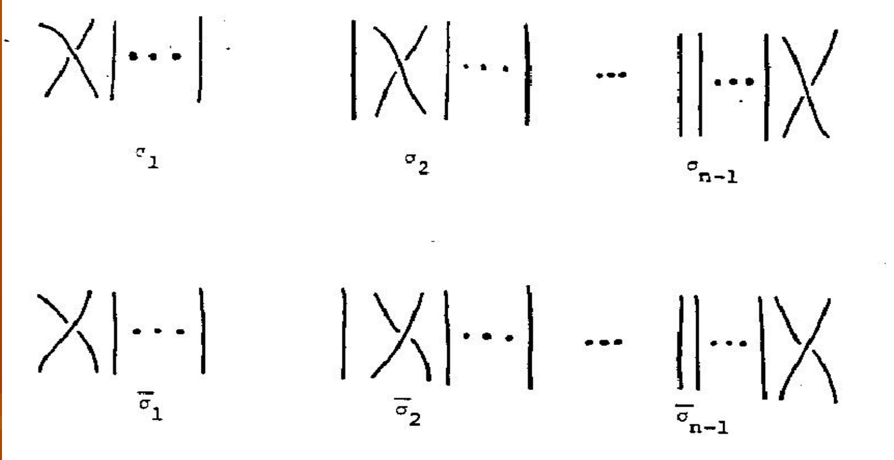
- Μία **κοτσίδα** με n κλωστές είναι μία εμφύτευση n αντιγράφων του ευθύγραμμου τμήματος I στον χώρο D^2x [0,1] ώστε :

1. Τα n άνω ακραία σημεία να απεικονίζονται σε n διαφορετικά σημεία στο D^2x {0} και τα n κάτω στον D^2x {1}.
2. Να μην υπάρχουν τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα.

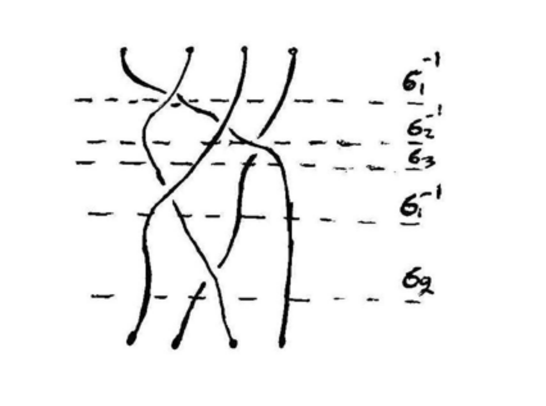


Ονομασία κοτσίδων

Γεννήτορες :

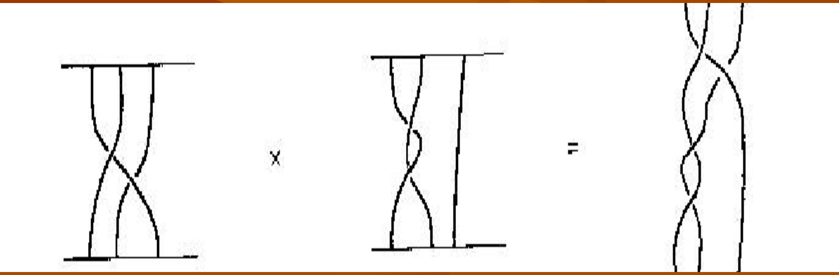


Χωρίζουμε την κοτσίδα με ένα σύνολο από οριζόντιες ευθείες, ώστε ανάμεσα σε δύο ευθείες να υπάρχει μία διασταύρωση-ένας γεννήτορας.



Η ομάδα B_n

B_n : κοτσίδες με n κλωστές
Πράξη συγκόλλησης

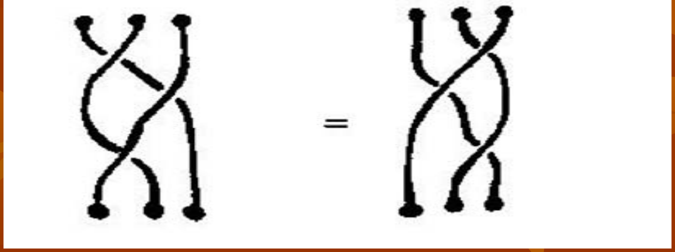


Το σύνολο B_n είναι <u>ομάδα.</u>

- Ουδέτερο στοιχειο
- (α β) γ = α (β γ)
- Υπάρχει αντίστροφο στοιχείο

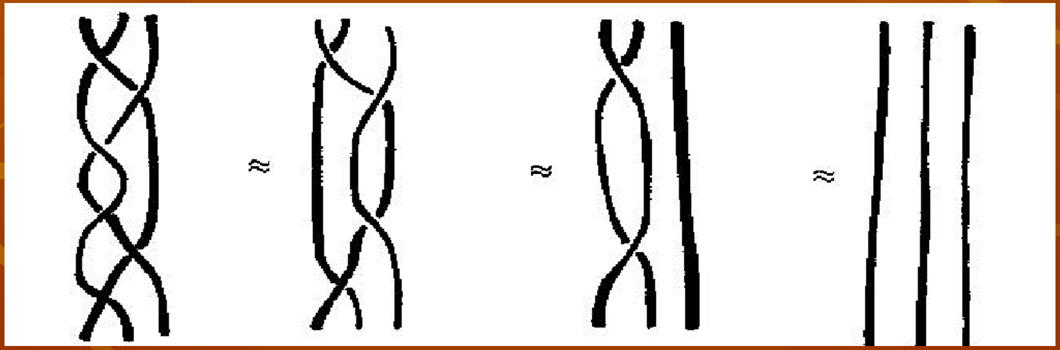
Βασικές σχέσεις στην B_n :

- $\sigma_i \sigma_i^{-1} = 1$
- $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad |i-j| > 1$
- $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$



Ισοτοπίες κοτσίδων

- Δύο κοτσίδες είναι ισοτοπικές αν υπάρχει μία ισοτοπία από τη μία στην άλλη η οποία κρατά σταθερές τις κορυφές και δεν επιτρέπει κίνηση των κλωστών εκτός του χώρου μεταξύ άνω και κάτω κορυφών.



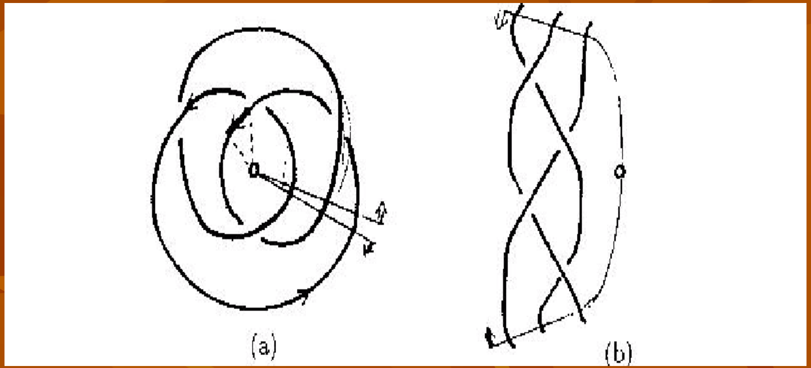
Κόμβοι και Κοτσίδες

Πώς προκύπτει από κόμβο κοτσίδα;

- **Θεώρημα Alexander**.

Οποιοσδήποτε κόμβος είναι ισοτοπικός με το κλείσιμο κάποιας κοτσίδας.

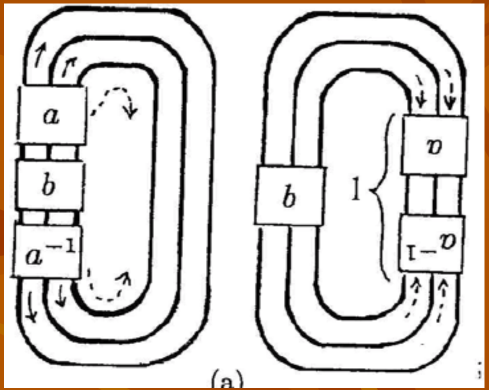
Ένας προσανατολισμένος κόμβος **περιστρέφεται** γύρω από το O αν κάθε πλευρά του μπορεί να εκληφθεί ως θετική ως προς το O.



- <u>Παρατήρηση </u>: Από οποιονδήποτε κόμβο χωρίς σημείο περιστροφής μπορεί να προκύψει ισοτοπικός του που να περιστρέφεται γύρω από κάποιο σημείο.

Από 2 ισοτοπικούς κόμβους προκύπτουν ισοτοπικές κοτσίδες;

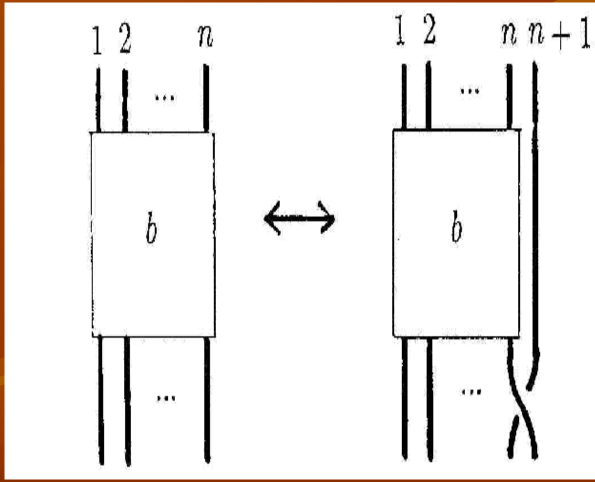
- **Θεώρημα Markov.**



Τα κλεισίματα δύο κοτσίδων είναι ισοτοπικά αν και μόνο αν μπορούμε να μεταβούμε από τη μια κοτσίδα στην άλλη με μια σειρά από κινήσεις Markov.

Πρώτη κίνηση Markov :
b ισοτοπική με aba^{-1}

Δεύτερη κίνηση Markov.
b ισοτοπική με $b\sigma_n$



$L = \{$κόμβοι και κρίκοι$\}$

I αναλλοίωτη κόμβων : ισοτοπικοί κόμβοι θα αντιστοιχούν στο ίδιο πολυώνυμο.

Μέσω των θεωρημάτων Markov, Alexander :

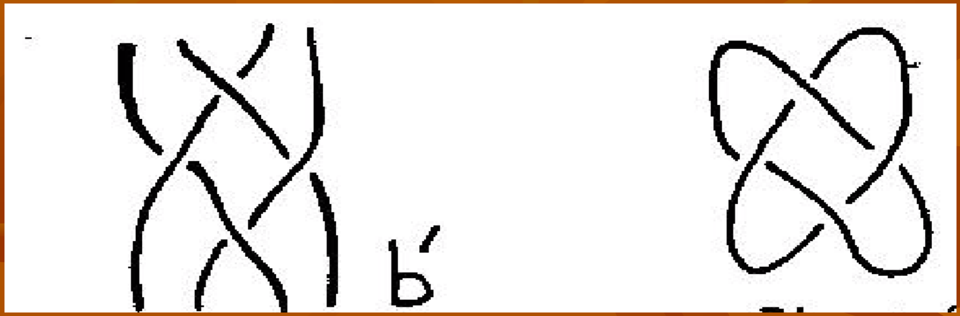
I : {κλάση ισοτοπίας του K} $\longrightarrow$ πολυώνυμο

I : {κλάση ισοδυναμίας της b} $\rightarrow$ ίδιο πολυώνυμο

Μια απεικόνιση $I : \cup B_n \longrightarrow$ {πολυώνυμα}, είναι αναλλοίωτη κόμβων αν για b_1, $b_2 \in \cup B_n$, με b_1 Markov ισοδύναμη της b_2

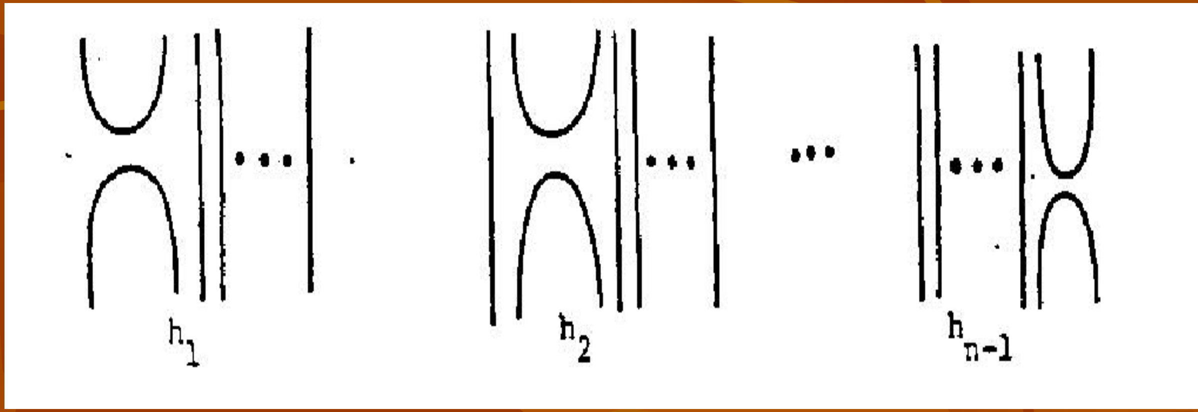
$I(b_1) = I(b_2)$.

Κλείσιμο Plat

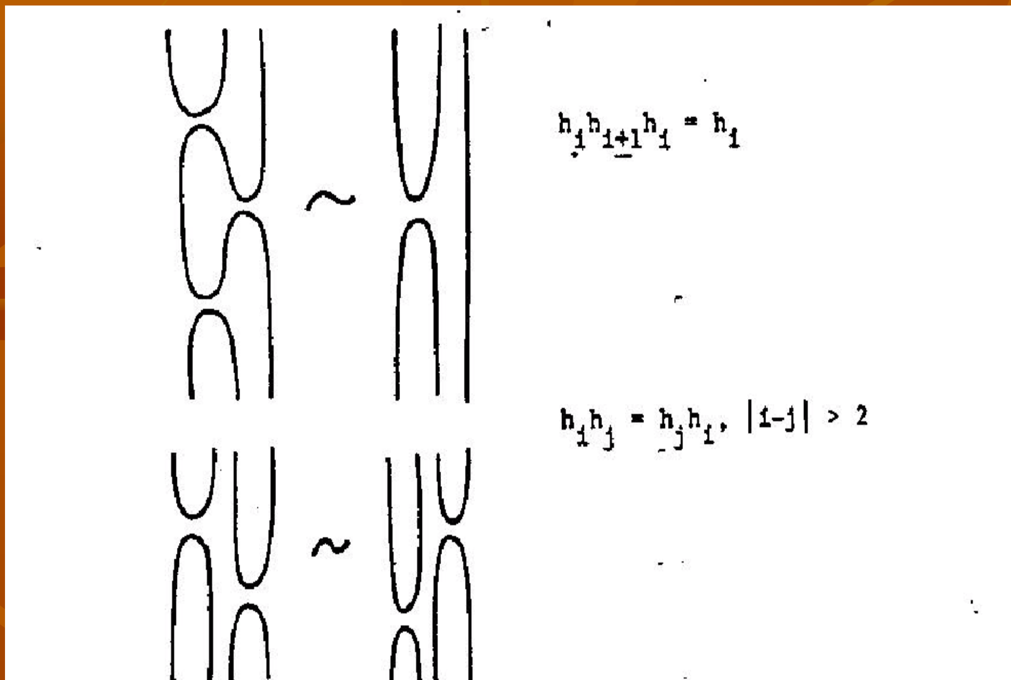


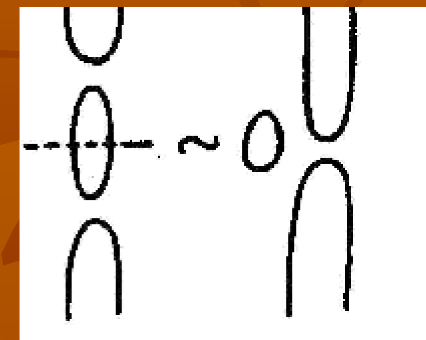
- Για κοτσίδες με άρτιο αριθμό κλωστών.

Γεννήτορες :



Ισχύουν οι σχέσεις :





$h_i h_i = d\, h_i$

Οι γεννήτορες h_i μαζί με τις παραπάνω σχέσεις ορίζουν την άλγεβρα *Temperley Lieb*.

Γραμμικές αναπαραστάσεις

$GL(V) = \{f : V \to V \ / \ f$ γραμμική και αντιστρέψιμη$\}$

Έστω G ομάδα. Μια *γραμμική αναπαράσταση* της G είναι ένας ομομορφισμός ομάδων ρ τέτοιος ώστε :

$$\rho : G \to GL(V)$$

όπου V είναι διανυσματικός χώρος πάνω σε κάποιο σώμα K.

Γραμμικές αναπαραστάσεις

κατασκευή αναλλοίωτων

Εφαρμογή στην ομάδα B_n

Συγκεκριμένα έστω $G = B_n$ και έστω :

$\rho : B_n \to GL(V)$

μια αναπαράσταση της B_n. Τότε:

$\rho(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1) = \rho(\sigma_1)\, \rho(\sigma_2)\, \rho(\sigma_1)$

Όμως $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$ και επομένως αφού η ρ είναι καλώς ορισμένη, θα πρέπει :

$\rho(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1) = \rho(\sigma_2 \sigma_1 \sigma_2)$

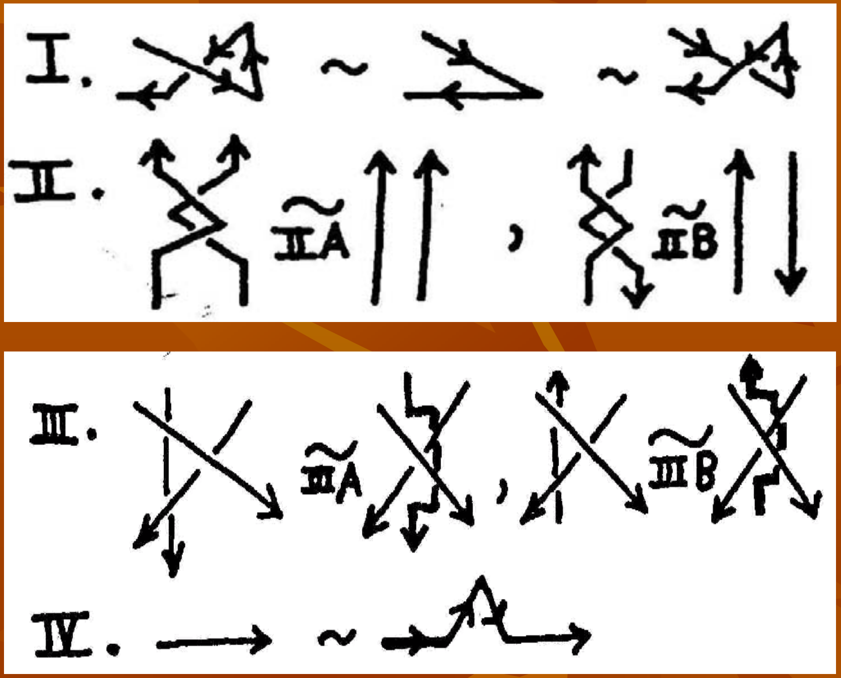
Οπότε :

1. $\rho(\sigma_1)\, \rho(\sigma_2)\, \rho(\sigma_1) = \rho(\sigma_2)\, \rho(\sigma_1)\, \rho(\sigma_2)$
2. $\rho(\sigma_1)\, \rho(\sigma_3) = \rho(\sigma_3)\, \rho(\sigma_1)$

Μοντέλα κορυφής

Ένα προσανατολισμένο διάγραμμα κόμβου K λέγεται *κατά τμήματα γραμμικό* αν μπορεί να προβληθεί σε κάποιο προσανατολισμένο επίπεδο γράφημα G με ευθύγραμμες πλευρές. Θα λέμε το G *προβολή* του K.

Οι κινήσεις Reidemeister είναι : ⟶

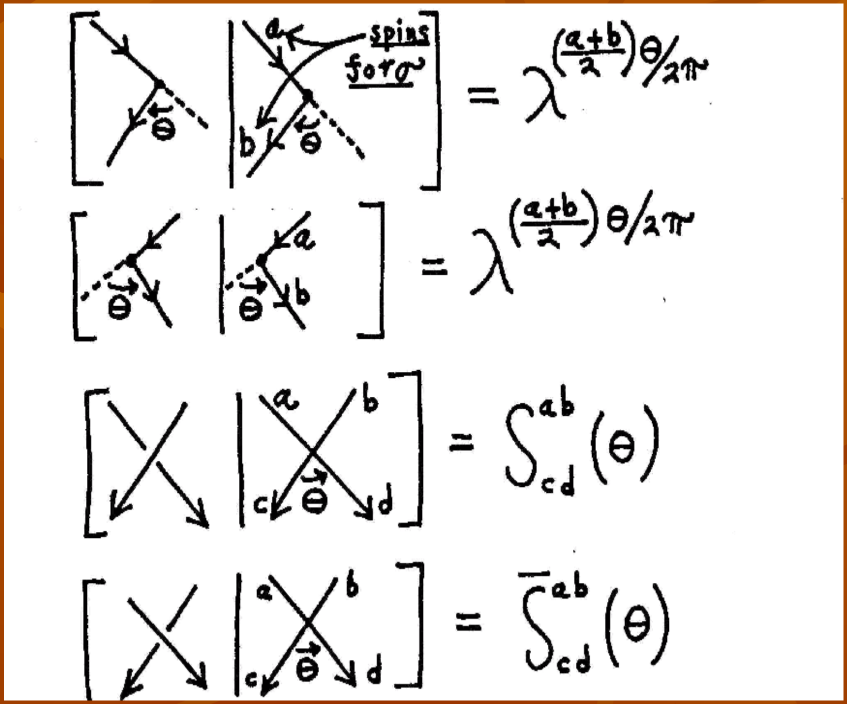


Αντιστοιχούμε spin στις πλευρές του G.

Κατάσταση σ : αντιστοίχιση spin σε όλες τις πλευρές.

Πίνακας-S

- Σε κάθε κορυφή ν αντιστοιχούμε ένα βάρος [ν | σ] όπως στο σχήμα



- Ένας *πίνακας-S* (S-matrix) είναι ένας πίνακας $S^{ab}_{cd}(\theta)$ που εξαρτάται από τη γωνιακή παράμετρο θ, και είναι το βάρος σε μία διασταύρωση .

- [K | σ] : = το γινόμενο όλων των βαρών.

- Το εύρος είναι :

  $< K > = \Sigma\, [K \mid \sigma]$

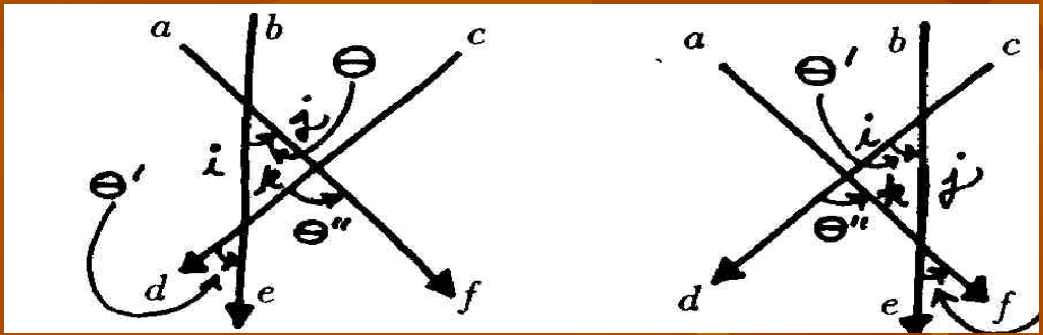
Πίνακας-R

- Ας υποθέσουμε ότι ο πίνακας-S παραγοντοποιείται ως εξής :

(Yang-Baxter)

$$S^{ab}_{ij}(\theta)\, S^{jc}_{kf}(\theta+\theta')\, S^{ik}_{de}(\theta') = S^{bc}_{ki}(\theta')\, S^{ik}_{dj}(\theta+\theta')\, S^{ja}_{ef}(\theta).$$

Σχηματικά :



- Ένας πίνακας-S λέγεται *ειδικός* αν μπορεί να πάρει τη μορφή :

$$S^{ab}_{cd} = R^{ab}_{cd}\,\lambda^{(d-a)\theta/2\pi}$$

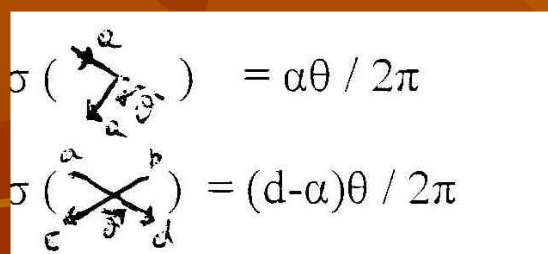
- Ένας πίνακας-S λέγεται ότι *διατηρεί το φορτίο* το άθροισμα των εισερχόμενων φορτίων είναι ίσο με το άθροισμα των εξερχόμενων.

Για έναν ειδικό πίνακα που διατηρεί το φορτίο και ικανοποιεί την εξίσωση Yang-Baxter ο αντίστοιχος πίνακας-R θα ικανοποιεί την Yang-Baxter χωρίς εξάρτηση από τη γωνία θ.

Αν ο πίνακας-S είναι ειδικός μπορούμε να ορίσουμε τον αντίστροφό του : $\bar{S} = \bar{R}^2 S$

Το εύρος < K > ενός γραφήματος G θα λέγεται *ειδικό* αν ο πίνακας-S του γραφήματος είναι ειδικός και διατηρεί το spin.

Γωνιακή τιμή :



||S|| : = το άθροισμα πάνω σε κάθε κορυφή των γωνιακών τιμών

Δεδομένης κάποιας κατάστασης σ έστω < K | σ > το γινόμενο των πινάκων R που συνεισφέρουν οι κορυφές διασταυρώσεων. Θα είναι :

$$[K \mid \sigma] = \langle K \mid \sigma \rangle \lambda^{\|S\|}$$

και έτσι το < K > γίνεται : $\langle K \rangle = \Sigma \langle K \mid \sigma \rangle \lambda^{\|S\|}$

Θεώρημα : Αν ο πίνακας-R ικανοποιεί την εξίσωση Yang-Baxter και αν το R ικανοποιεί επίσης την αναστροφή cross-channel,

$$R_{ib}^{je}\,\overline{R_{cd}^{ij}}\,\lambda^{(b-j)/2}\lambda^{(d-i)/2} = \delta_c^a\delta_b^c$$

τότε το< K > αποτελεί μία <u>αναλλοίωτη κανονικής ισοτοπίας</u>.

Απόδειξη για την κίνηση IIA :

$< K > = \Sigma < K \mid \sigma > \lambda^{\|S\|}$, ισχύει

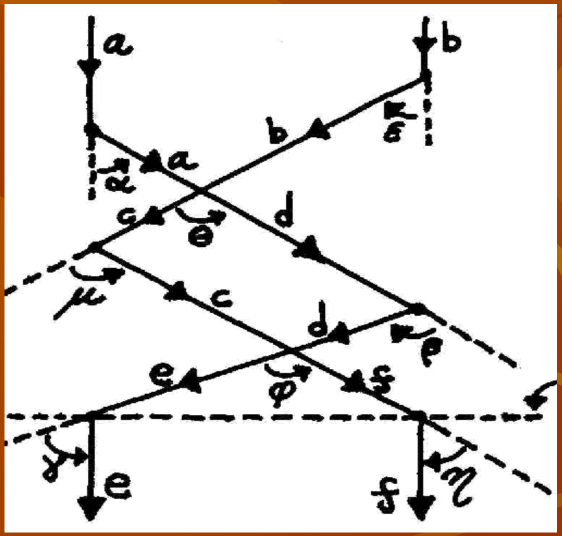
$a + b = c + d = e + f$

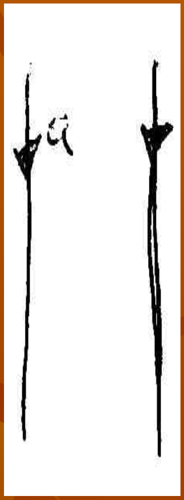
Δ : = το άθροισμα των γωνιακών τιμών.

Αφού R, $\bar{R}$ αντίστροφοι αρκεί να δειχθεί ότι Δ = 0.

$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \varepsilon + \mu + \eta = 0 \quad \theta + \varphi = \mu - \beta \quad a + b = c + d = e + f$

$\Delta = a\alpha + b\varepsilon + (d - a)\theta + \mu c + db + (f - c)\varphi + \gamma e + \eta f$





Στατιστική Μηχανική - Θεωρία Κόμβων

Κατασκευή αναλλοίωτων για κόμβους με τη βοήθεια στατιστικών μοντέλων.

Μπορούμε να μεταβούμε από αναλλοίωτες κόμβων στη συνάρτηση διαμέρισης κάποιου στατιστικού μοντέλου.

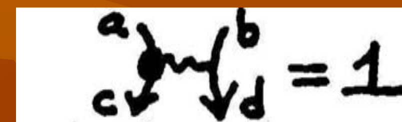
Ένα συγκεκριμένο μοντέλο

Ορίζουμε τον R από τη σχέση :

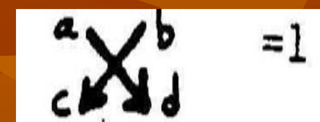
Και τον αντίστροφό του :

Θεωρούμε τα επίπεδα γραφήματα που προκύπτουν από ένα διάγραμμα αν οι διασταυρώσεις αντικατασταθούν με προβολή ή χωρισμό

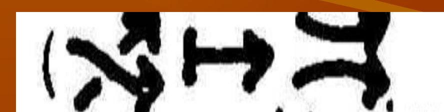
Γενικευμένα δέλτα του Kronecker, με την ερμηνεία :

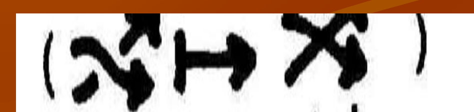


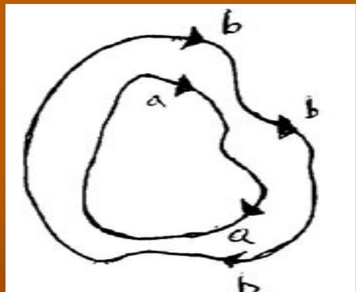
αν a=c<b=d
και 0 αλλιώς

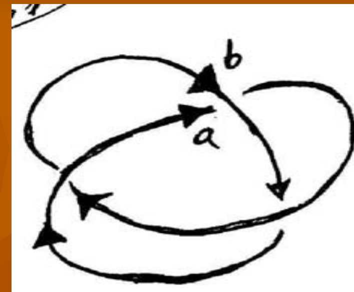


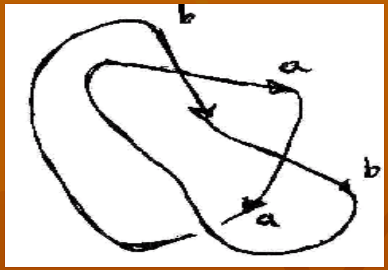
αν a=d ≠ b=c

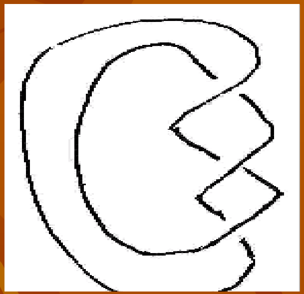


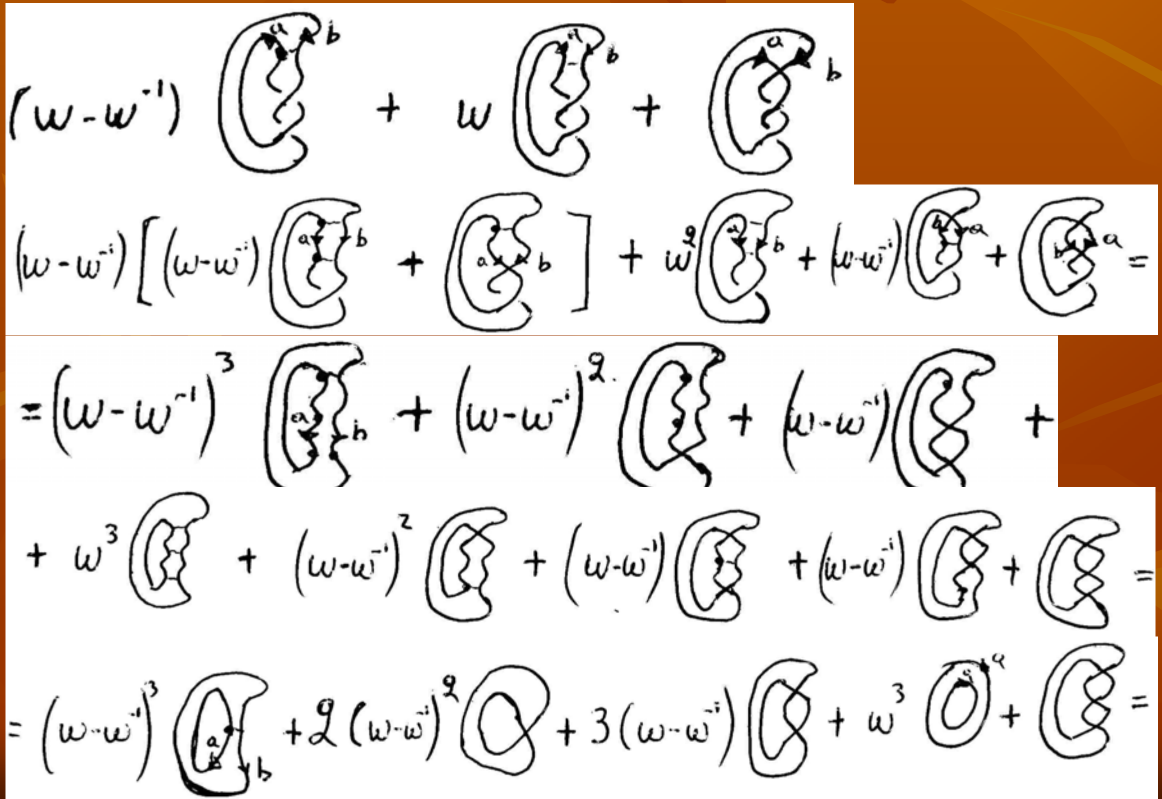












- π.χ. ένας κλειστός κύκλος έχει

$$< K > = \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha}$$

Η αναλοίωτη αυτή σχετίζεται με το πολυώνυμο HOMFLY